Sistemas de ecuaciones lineales

Este tema resulta fundamental en la mayoría de las disciplinas, ya que son muchos los problemas científicos y de la vida cotidiana que requieren resolver simultáneamente varias ecuaciones lineales para hallar las soluciones comunes a todas ellas.

1. Conceptos preliminares

Una **ecuación** es una igualdad que establece una relación entre variables desconocidas y que, por ello, se les denomina **incógnitas**.

Ejemplos:

$x + 3y^2 - 2y = 1$ es una ecuación con dos incógnitas: x e y.

$x + y = 20$ es otra ecuación con dos incógnitas: x e y.

$3x + 2y + 6z = 6$ es una ecuación con tres incógnitas: x, y y z.

Una ecuación se llama **lineal** si es de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números conocidos denominados **coeficientes** y b es también un número conocido denominado **término independiente**. En los ejemplos anteriores, las ecuaciones $x + y = 20$ y $3x + 2y + 6z = 6$ son lineales, mientras que $x + 3y^2 - 2y = 1$ no es lineal.

Se llama **solución** o **raíz de una ecuación** a los valores que deben tomar las incógnitas para que la igualdad sea cierta.

Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

2. Sistemas de ecuaciones lineales. Definición

Se llama sistema de ecuaciones lineales a un conjunto de cuaciones lineales cuyas soluciones, si las hay, han de ser simultáneamente soluciones de todas las ecuaciones del sistema.

Es decir, un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

donde, x_i con $i = 1, \ldots, n$ son las incógnitas, $a_{ij} \in I\!R$, con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$ son los coeficientes y $b_i \in I\!R$, con $i = 1, \ldots, m$, son los términos independientes del sistema.

El sistema (1) se dice que es un sistema de m ecuaciones y n incógnitas.

Ejemplo 1: El sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

es un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas.

Si todos los términos independientes son nulos, el sistema se llama **homogéneo**.

Ejemplo 2: El siguiente sistema es un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con

4 incógnitas.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Expresión matricial de un sistema

El sistema (1) se puede expresar en forma matricial como $AX = B$, donde:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, de orden $m \times n$, es la **matriz de los coeficientes**,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, de orden $n \times 1$, es el vector o la **matriz de las incógnitas**

y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, de orden $m \times 1$, es el vector o la **matriz de los términos independientes**.

Ejemplo: En el sistema del ejemplo 1, se tiene que:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, de orden 4×3, es la matriz de los coeficientes,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, de orden 3×1, es el vector o la matriz de las incógnitas y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, de orden 4×1, es el vector o la matriz de los términos independientes.

Se llama **matriz ampliada** del sistema a la matriz de orden $m \times (n+1)$ que se obtiene al añadir a la matriz de coeficientes la columna de los términos independientes, es decir,

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo: En el sistema del ejemplo 1,

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

es la matriz ampliada.

4. Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Un conjunto ordenado de números reales $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ es **una solución del sistema (1)**, si al sustituir las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ por los respectivos valores $s_1, s_2, \dots, s_n$ se verifican a la vez las m ecuaciones.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es hallar, si existen, todas sus soluciones.

En general, se buscarán las soluciones de los sistemas en $I\!R$.

Los sistemas se pueden clasificar, dependiendo del posible número de soluciones reales que tengan, en:

1. INCOMPATIBLES si no tienen solución.
2. COMPATIBLES si tienen solución.
   2.1. DETERMINADOS si tienen una única solución.
   2.2. INDETERMINADOS si tienen más de una solución.

Observaciones:

- Un sistema homogéneo siempre es compatible, pues $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ siempre es solución del sistema.
- Si el sistema homogéneo es compatible determinado entonces $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ es la única solución del sistema.

5. Existencia de soluciones

Teorema de Rouché-Fröbenius. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución, es decir, para que sea compatible, es que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$, donde A es la matriz de coeficientes y $(A|B)$ la matriz ampliada.

Si el sistema es compatible, es decir, si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$, se verifica que:

- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) =$ número de incógnitas, entonces el sistema es compatible determinado.
- Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) <$ número de incógnitas, entonces el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un número de parámetros igual al número de incógnitas menos el rango.

Ejemplo 1: A continuación se obtiene, aplicando el método de Gauss, el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada del sistema del ejemplo 1 dado en la página 2.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{r} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 4F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+11F_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, $\text{rg}(A|B) = \text{rg}(A) = 3$ (número de filas no nulas de la matriz escalonada), por lo que el sistema es compatible. Por otro lado, se tiene que $\text{rg}(A|B) = \text{rg}(A) = 3 =$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado y tendrá una única solución.

Ejemplo 2: Consideramos el sistema del ejemplo 2 dado en la página 2. Sabemos que el sistema es compatible, ya que es un sistema homogéneo, e indeterminado, puesto que tanto el rango de la matriz de coeficientes como el de la ampliada es menor o igual que 3 ($1 \leq \text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$), que en este caso es menor que el número de incógnitas.

Concretamente, el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 2, ya que existe un menor de orden 2 distinto de cero, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, y todos los menores de orden 3 son cero.

Por tanto, la solución depende de un número de parámetros igual al número de incógnitas menos el rango, es decir, depende de $4 - 2 = 2$ parámetros.

Ejemplo 3: Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & & & = & 7 \end{array}\right.$$

A continuación se calcula el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada del sistema aplicando el método de Gauss.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{r} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Por tanto, $\mathrm{rg}(A|B) = 3 \neq \mathrm{rg}(A) = 2$, por lo que el sistema es incompatible.

6. Sistemas equivalentes

Se dice que dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Dos sistemas de ecuaciones equivalentes no tienen que tener el mismo número de ecuaciones, aunque si es necesario que tengan el mismo número de incógnitas.

Existen transformaciones sobre las ecuaciones de un sistema que pasan de ese sistema a otro equivalente a él. Estas transformaciones son:

- Intercambiar ecuaciones.
- Intercambiar el orden de las incógnitas.
- Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.
- Sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes.

- Suprimir una ecuación que es combinación lineal de otras.

Mediante la aplicación de estas transformaciones se puede obtener otro sistema equivalente al inicial y que sea más sencillo de resolver. Esto resulta de gran utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones, como se verá más adelante.

7. Resolución del sistema. Métodos directos

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar, si existen, todas sus soluciones, por lo que lo primero que se debe hacer es discutir la compatibilidad del sistema mediante el teorema de Rouché-Fröbenius.

Los sistemas más sencillos son aquellos en los que sólo hay dos ecuaciones con dos incógnitas. En estos sistemas incluso no es necesario utilizar al teorema de Rouché-Fröbenius para discutir la compatibilidad del sistema, ésto se obtiene directamente al resolverlo. Para resolver este tipo de sistemas existen distintos métodos:

- Reducción
- Igualación
- Sustitución

Estos métodos deben ser ya conocidos, por lo que en este tema nos centraremos en otros métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones más complejos. En el ejemplo siguiente, a modo de recordatorio, se aplican los tres métodos señalados anteriormente.

Ejemplo: $\left\{\begin{array}{rcr} x+2y & = & -3 \\ -2x+y & = & 1 \end{array}\right.$

- Por reducción:

$$\begin{array}{rcr} 2x+4y & = & -6 \\ -2x+y & = & 1 \\ \hline 5y & = & -5 \end{array}$$

de donde $y = -1$ y sustituyendo en la primera ecuación: $x + 2(-1) = -3$, se tiene $x = -1$. Por lo que la única solución es $x = -1$ e $y = -1$, es decir, el sistema es compatible y determinado.

- **Por igualación:** $\left\{ \begin{array}{lcr} x & = & -3 - 2y \\ x & = & \dfrac{y-1}{2} \end{array} \right.$

  de donde $-3 - 2y = \dfrac{y-1}{2} \Longrightarrow -4y - 6 = y - 1 \Longrightarrow 5y = -5 \Longrightarrow y = -1$ y sustituyendo en la primera ecuación se tiene $x = -1$.

- **Por sustitución:** Despejando x de la primera ecuación: $x = -3 - 2y$ y sustituyendo en la segunda ecuación se tiene $-2(-3 - 2y) + y = 1 \Longrightarrow 6 + 4y + y = 1 \Longrightarrow 5y = -5 \Longrightarrow y = -1$ y sustituyendo en la primera ecuación se tiene $x = -1$.

Para resolver sistemas con un número mayor de ecuaciones y/o de incógnitas los métodos anteriores pueden resultar muy complicados, por lo que conviene aplicar otros métodos.

A continuación, se muestran los siguientes métodos:

- Método de Gauss
- Regla de Crámer
- Método de la matriz inversa

7.1. Método de Gauss:

Este método es la generalización del método de reducción y se basa en el concepto de equivalencia. Se puede utilizar para resolver cualquier tipo de sistema de ecuaciones lineales. En la práctica es el método más utilizado.

El método consiste en, a partir de un sistema $AX = B$, conseguir otro sistema $A'X = B'$ equivalente, de modo que A' sea una matriz escalonada. De esta forma, el sistema $A'X = B'$ se puede resolver fácilmente y las soluciones de este sistema son las soluciones del sistema inicial, puesto que son sistemas equivalentes.

Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, se trata de obtener un sistema equivalente, de manera que la primera ecuación tenga n incógnitas, la segunda $n-1$, y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación que tendrá una sola incógnita. De este modo, se resuelve la última ecuación, a continuación la penúltima ecuación, y así sucesivamente hasta resolver la primera ecuación.

Observaciones:

1. Las transformaciones sobre el sistema para obtener otro sistema equivalente (véase sección 6) se pueden hacer, prescindiendo de las incógnitas, sobre la matriz ampliada del sistema, lo que resulta en la práctica más cómodo, ya que:

- Intercambiar ecuaciones (o incógnitas) del sistema equivale a intercambiar las correspondientes filas (o columnas) de la matriz ampliada.
- Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero equivale a multiplicar la correspondiente fila de la matriz ampliada por dicho número.
- Sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes equivale a sumar a la respectiva fila de la matriz ampliada la correspondiente combinación lineal de las restantes filas.

2. Utilizando este método no es necesario estudiar primero la compatibilidad del sistema con el Teorema de Rouché-Fröbenius, puesto que las transformaciones para obtener un sistema equivalente, descritas en la sección 6, son las mismas que las que se hacían, en el tema Matrices y Determinantes, para el cálculo del rango de una matriz, es decir, en ambos casos se aplica el método de Gauss. Así, con este método se puede discutir a la vez la compatibilidad del sistema y, en el caso de ser compatible, obtener la solución del sistema.

Ejemplo 1: Consideramos nuevamente el sistema dado en el ejemplo 1 de la página 2:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Para discutir la compatibilidad del sistema, mediante la aplicación del teorema de Rouché-Fröbenius, en la sección 5 se utilizó el método de Gauss, realizando sobre la matriz ampliada las transformaciones necesarias para obtener una matriz escalonada equivalente por filas a ella, con el objetivo de calcular el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada. Concretamente, se obtuvo:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y $\text{rg}(A|B) = \text{rg}(A) = 3 =$ número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado y tendrá una única solución.

Estas transformaciones también dan lugar a un sistema equivalente más sencillo y con las características descritas anteriormente, es decir, que cada ecuación tenga una incógnita menos que la ecuación anterior. Por lo que también ya se ha aplicado el método de Gauss para la resolución del sistema.

La matriz obtenida es la matriz ampliada de un sistema equivalente al inicial:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \\ 6x_3 & = & 6 \end{array}\right.$$

Se resuelve este sistema:

Despejando de la última ecuación: $x_3 = 1$.

Sustituyendo en la segunda ecuación $x_3 = 1$, se tiene $x_2 = 0$.

Finalmente, se sustituyen $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$ en la primera y se obtiene que $x_1 = 1$.

La solución de este sistema es $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$ y también es la solución del sistema inicial por ser sistemas equivalentes.

Ejemplo 2: Consideramos el sistema dado en el ejemplo 2 de la página 2:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

El sistema es compatible, porque es un sistema homogéneo.

A continuación se aplica el método de Gauss para resolver el sistema:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{r} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Por tanto, como se había comentado anteriormente, con el método de Gauss vemos también que el $\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}(A) = 2$ (véase sección 5, página 6), por lo que el sistema es indeterminado y la solución depende de un número de parámetros igual al número de incógnitas menos el rango, es decir, la solución depende de $4 - 2 = 2$ parámetros.

La última matriz obtenida al aplicar el método de Gauss es la matriz ampliada de un sistema equivalente al inicial:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Se resuelve este sistema:

Despejando de la última ecuación: $x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4$.

Sustituyendo en la primera ecuación $x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4$, se tiene $x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$.

Por tanto, para cada valor fijado de x_3 y x_4 se tiene una solución del sistema, por lo que hay infinitas soluciones.

La solución del sistema es:

$x_1 = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu$, $\quad x_2 = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}\mu$, $\quad x_3 = \lambda \;$ y $\; x_4 = \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

7.2. Regla de Cramer:

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es un **sistema de Crámer** si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo.

Un sistema de Cramer es, por definición, siempre compatible y determinado. Puesto que, al ser el determinante de la matriz de coeficientes no nulo, el rango de esta matriz es igual a n (número de incógnitas o número de ecuaciones). También el rango de la matriz ampliada es n, pues esta otra matriz tiene n filas y $n+1$ columnas y su rango no puede ser mayor que n. Por tanto, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible y determinado.

La resolución de un sistema de Cramer puede efectuarse mediante la siguiente regla:

Regla de Cramer: En un sistema de Crámer, cada incógnita x_i puede obtenerse mediante el cociente de dos determinantes. El numerador es el determinante de la matriz de los coeficientes en la que se ha sustituido la columna i por la columna de los términos independientes y el denominador es el determinante de la matriz de los coeficientes.

Ejemplo: Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \end{array}\right.$$

aplicamos la regla de Cramer para su resolución.

Podemos aplicar la regla de Cramer puesto que es un sistema de Cramer, es decir, tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Entonces,

$$x_1 = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{35}{18}, \quad x_2 = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \frac{29}{18} \text{ y } x_3 = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \frac{5}{18}$$

Este método no resulta muy aconsejable para los sistemas de más de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, pues el cálculo de los determinantes de orden superior a 3 puede resultar una tarea más ardua que los cálculos matriciales que exige el método de Gauss.

La regla de Cramer también se puede usar en sistemas compatibles indeterminados. El ejemplo siguiente ilustra como se procede en estos casos.

Ejemplo: Consideramos el sistema de ecuaciones del ejemplo 2 de la página 2:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema no es un sistema de Cramer puesto que no tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Sabemos que el sistema es compatible e indeterminado (véase sección 5, página 6 y subsección 7.1, página 12).

En la sección 5, página 6, vimos que el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 2, ya que existe un menor de orden 2 distinto de cero, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, y todos los menores de orden 3 son cero. Entonces, la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos, ya que este menor corresponde a las dos primeras ecuaciones, y podemos prescindir de la tercera ecuación puesto que el sistema resultante es equivalente al inicial:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

En cada ecuación, se pasan al término independiente todas las incógnitas no implicados en el menor distinto de cero, multiplicadas por el correspondiente coeficiente:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & -x_3 - x_4 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & -2x_3 - 4x_4 \end{array} \right.$$

Ahora tenemos un sistema de Cramer con 2 ecuaciones y dos incógnitas: x_1 y x_2, donde la matriz de los coeficientes es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es distinto de cero, y el vector de los términos independientes es $\begin{pmatrix} -x_3 - x_4 \\ -2x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}$.

Aplicando la regla de Cramer a este sistema, se tiene:

$$x_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -x_3 - x_4 & 1 \\ -2x_3 - 4x_4 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \quad \text{y}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -x_3 - x_4 \\ 1 & -2x_3 - 4x_4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4$$

La solución del sistema es:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu, \quad x_2 = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}\mu, \quad x_3 = \lambda \quad \text{y} \quad x_4 = \mu, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

7.3. Método de la matriz inversa:

En la sección 3 vimos que un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma maticial como $AX = B$, donde A, X y B son las matrices ya definidas de los coeficientes, las incógnitas y los términos independientes, respectivamente. El objetivo es calcular la matriz X de las incógnitas.

Si la matriz A tiene inversa, es decir, si A es una matriz cuadrada, o equivalentemente si el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, y el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, esto es, si es un sistema de Cramer, también se puede resolver, aprovechando el concepto de matriz inversa, multiplicando a la izquierda en ambos miembros de la igualdad $AX = B$ por la matriz inversa de A:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, y aplicando la propiedad asociativa del producto de matrices, se tiene

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$, es decir, $IX = A^{-1}B$, y puesto que la matriz identidad, I, es el elemento neutro del producto de matrices se llega a la expresión: $\mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}B}$.

Este método tiene el inconveniente de necesitar cálculos incómodos, pero la ventaja de resolver, sin tener que repetir la resolución completa, los sistemas que se obtienen al cambiar únicamente los términos independientes, lo que resulta de gran utilidad en muchos problemas prácticos.

Ejemplo 1: Consideramos el sistema de ecuaciones dado en la subsección 7.2 de la página 14:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \end{array}\right.$$

y aplicamos el método de la matriz inversa para su resolución.

Puesto que $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, existe la matriz inversa de A. Por tanto, podemos aplicar el método de la matriz inversa: $X = A^{-1}B$.

En primer lugar se obtiene la matriz inversa de A: $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 8 & 1 & -6 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, $X = A^{-1}B \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $x_1 = \frac{35}{18}$, $\quad x_2 = \frac{29}{18}$ y $x_3 = \frac{5}{18}$.

Ejemplo 2: Consideramos el sistema de ecuaciones del ejemplo 2 de la página 2:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

En principio no se puede aplicar el método de la matriza inversa a este sistema, ya que no tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Vimos que el sistema es compatible e indeterminado (el rango es 2 $<$ que el número de incógnitas, puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, y todos los menores de orden 3 son cero) y que este sistema es equivalente al siguiente (sección 7.2, pág. 15):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Entonces, podemos pasar al término independiente todas las incógnitas no implicados en el menor distinto de cero, multiplicadas por el correspondiente coeficiente. De este modo nos aseguramos que existe la matriz inversa de la matriz de coeficientes, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, puesto que su determinante es distinto de cero:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & -x_3 - x_4 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & -2x_3 - 4x_4 \end{array}\right.$$

Por tanto, se puede aplicar el método de la matriz inversa: $X = A^{-1}B$.

En primer lugar se obtiene la matriz inversa de A: $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, $X = A^{-1}B \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_3 - x_4 \\ -2x_3 - 4x_4 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x_3 + x_4 \\ -x_3 - 3x_4 \end{pmatrix}$. Por tanto, $x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$ y $x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4$.

La solución del sistema es:

$x_1 = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu$, $x_2 = -\frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}\mu$, $x_3 = \lambda$ y $x_4 = \mu$, con $\lambda, \mu \in I\!R$.

8. Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ mx_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$

2. Se han mezclado dos tipos de líquidos; el primero de 0,94 euros el litro y el segunde de 0,86 euros el litro, obteniéndose 40 litros de mezcla a 0,89 euros el litro. Cuántos litros se ha puesto de cada clase?

3. Se ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de un producto A, 6 kilos de B y 12 litros de otro producto C. Calcular el precio de cada producto, sabiendo que un litro de C cuesta el triple que un litro de A y que un kilo de B cuesta igual que cuatro litros de C más cuatro litros de A.

4. Un almacén distribuye cierto producto que fabrican tres marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 g y su precio es de 100 euros; la marca B lo envasa en cajas de 500 g a un precio de 180 euros y la marca C lo hace en cajas de 1 kg a un precio de 330 euros.

   El almacén vende a un cliente 2,5 kg de este producto por un importe de 890 euros. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, calcular cuántos envases de cada tipo ha vendido el almacén a dicho cliente.